Tanım: $x=x_0$ noktası singüler (tekil) nokta olsun.

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P_1(x), \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2P_2(x), \ldots \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^n P_n(x)$$

limitlerinin herbiri sonlu ise (veya

$$(x-x_0)^n y^{(n)} + (x-x_0)^{n-1} b_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + (x-x_0)\, b_{n-1}(x)\, y' + b_n(x)\, y = 0$$

denklemi için $b_i(x)$ fonksiyonları $x=x_0$'da analitik ise)

$x=x_0$ noktasına düzgün singüler nokta denir.

Bu durumda

$$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{r+n}$$

formunda çözüm aranır. Özel olarak $x_0=0$ ise

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

olur. Bu yönteme Frobenius yöntemi olarak bilinir.

Örnek: $3x^2y'' + xy' + 2y = 0$ denklemi verilsin.

Denklem düzenlenirse

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{3x}}_{p_1(x)} y' + \underbrace{\frac{2}{3x^2}}_{p_2(x)} y = 0$$

yazılabilir. $x_0 = 0$'da p_1 ve p_2 analitik değildir.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)\, p_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] \lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)^2\, p_2(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \dfrac{2}{3x^2} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$$

limitleri sonlu olduğundan

$x_0 = 0$ noktası düzgün singüler noktadır.

Örnek: $x^3 y'' + (x-1) y' + xy = 0$ denklemi verilsin.

$$y'' + \frac{x-1}{x^3} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$ yazılırsa $p_1(x) = \frac{x-1}{x^3}$,

$p_2(x) = \frac{1}{x^2}$ olacağından bu fonksiyonlar $x=0$ da analitik değiller.

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \frac{x-1}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0} = \infty$$ sonlu limit olmadı-

ğı için $x=0$ düzgün singüler nokta değildir.

Örnek: $2x^2y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ komşuluğunda seri çözümünü bulunuz.

$x^2y'' + \frac{3}{2}xy' - \frac{(1+x)}{2}y = 0$ yazılırsa $b_1(x) = \frac{3}{2}$, $b_2(x) = -\frac{1+x}{2}$ olup bu fonksiyonlar her noktada analitik olduğundan $x=0$ da da analitik olacağından $x_0 = 0$ düzgün singüler noktadır (veya limitlerin sonlu olmasına da bakılabilir)

$x_0 = 0$ düzgün singüler nokta olduğundan $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ Frobenius seri çözümü vardır.

(A) Denklem ikinci mertebeden olduğundan y_1 ve y_2 şeklinde lineer bağımsız iki çözüm mevcuttur. Bu çözümlerden en az bir tanesi Frobenius seri formunda olmalıdır, diğeri kuvvet serisi formunda olabilir.

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$, $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$

için

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}+3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}}_{x^r,\ x^{r+1}\ \cdots}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r}}_{x^r,\ x^{r+1}\ \cdots}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1}}_{x^{r+1},\ x^{r+2}\ \cdots}=0$$

$n \to n-1$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}}_{x^r,\ x^{r+1}\ \cdots}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_n x^{n+r}}_{x^r,\ x^{r+1}\ \cdots}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}}_{x^r,\ x^{r+1}}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}}_{x^{r+1},\ \cdots}=0$$

$$\Rightarrow 2r(r-1)a_0x^r+3ra_0x^r-a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-a_n-a_{n-1}\right\}x^{n+r}=0$$

x in katsayılarını sıfıra eşitlersek

$$\Rightarrow (2r^2-2r+3r-1)a_0=0 \Rightarrow 2r^2+r-1=0,\quad a_0\neq 0$$ elde edilir.

Buna indisel (karakteristik) denklem denir.

$$\big(2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1\big)a_n-a_{n-1}=0$$

$$\Rightarrow \big(2(n+r)-1\big)(n+r+1)a_n=a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\big(2(n+r)-1\big)(n+r+1)}a_{n-1},\quad n\geq 1$$ indirgeme (yineleme)

bağıntısı elde edilir.

$2r^2+r-1=0$ indisel denklemin kökleri $(2r-1)(r+1)=0$ dan

$r_1=1/2$ ve $r_2=-1$ dir. Buna göre çözümler

$$y_1(x)=x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad , \quad y_2(x)=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

şeklinde ikisi de frobenius serisi şeklinde bulunacaktır.

• $r_1=1/2$ için $a_n=?$

$r_1=1/2$ için indirgeme bağıntısından

$$a_n=\frac{1}{\left(2(n+\frac{1}{2})-1\right)\left(n+\frac{1}{2}+1\right)}a_{n-1} \quad , n\geq 1$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{n(2n+3)}a_{n-1} \, , \quad n\geq 1$$ elde edilir. Buradan

$n=1 \Rightarrow a_1=\frac{1}{1.5}a_0$

$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{1}{2.7}a_1$

$n=3 \Rightarrow a_3=\frac{1}{3.9}a_2$

$\vdots$

$a_n=\frac{1}{\ldots}a_{n-1}$

olup bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\cancel{a_1}\cdot\cancel{a_2}\cdot\cancel{a_3}\cdots a_n = \frac{1}{1\cdot 5}a_0\cdot\frac{1}{2\cdot 7}\cancel{a_1}\cdot\frac{1}{3\cdot 9}\cancel{a_2}\cdots\frac{1}{n\cdot(2n+3)}\cancel{a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)(5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3))}a_0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!\,(5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3))}a_0\,,\quad n\geq 1$$ elde edilir. Buna göre de

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} = a_0 x^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1/2}$$

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,(5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3))}a_0\, x^{n+1/2}$$

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,(5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3))}x^n\right)$$ dur.

$a_0 = 1$ alınırsa $y_1(x)$ çözümü

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,(5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3))}x^n\right)$$ şeklinde bulunur.

• $r_2 = -1$ için $a_n = ?$

$r_2 = -1$ için yine indirgeme bağıntısından

$$a_n = \frac{1}{(2(n-1)-1)(n-1+1)}\, a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n(2n-3)}\, a_{n-1}, \quad n \geq 1$$ elde edilir. Buradan

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1(-1)}\, a_0$$
$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2\cdot 1}\, a_1$$
$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3\cdot 3}\, a_2$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{1}{n(2n-3)}\, a_{n-1}$$

olup yine bunlarda taraf tarafa çarpılıp sadeleştirme yapılırsa

$$a_n = \frac{-1}{n!\,(1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-3))}\, a_0, \quad n \geq 1$$ elde edilir. Buradan

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = x^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$$

$$= x^{-1}\left(a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) = x^{-1}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n!\,(1.3.5\ldots(2n-3))} a_0 x^n\right)$$

olur. $a_0 = 1$ alınırsa

$$y_2(x) = x^{-1}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(1.3.5\ldots(2n-3))} x^n\right)$$ olur.

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümler olmak üzere verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$ olur.

Herbir seri için $R = \infty$ olup $|x| < \infty$ yakınsaklık aralığıdır.

Not: İndisel denklemin kökleri $r=r_1$, $r=r_2$ olmak üzere

① $r_1-r_2 \notin \mathbb{N}$ ve $r_1>r_2$ ise denklemin $y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde seri çözümleri vardır. Buradaki a_n ler birbirine eşit değildir.

② $r_1=r_2$ ise $y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve

$y_2(x)=y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)\, x^n$ şeklindedir. Buradaki $a_n'(r_1)$, a_n nin türevinde r_1 yazılmış halidir.

③ $r_1-r_2 \in \mathbb{N}$ ve $r_1>r_2$ ise $y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve

$y_2(x)=\frac{b_n}{a_0}\, y_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n'(r_2)\, x^n$ şeklindedir. Burada

$b_n(r)=(r-r_2)\,a_n(r)$ dir.

Örnek: $3xy'' + 2y' + y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ da seri çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ denklemin düzgün singüler noktası olup $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ şeklinde frobenius seri çözümü vardır. Buradan iki kez türev alınıp denklemde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3x.(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \underset{x^{r-1},\ x^{r},\ \ldots}{\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}} + \underset{x^{r-1},\ x^{r},\ \ldots}{\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1}} + \underset{x^{r},\ \ldots}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{n \to n-1}{x^{n+r}}} = 0$$

$$\Rightarrow 3r(r-1)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 2ra_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$\Rightarrow r(3r-1)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3(n+r)(n+r-1)a_n + 2(n+r)a_n + a_{n-1} \right\} x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. Katsayıların sıfıra eşitliğinden

$r(3r-1)a_0=0$, $a_0\neq 0$ için $r(3r-1)=0$ indisel denklemi ve

$(n+r)(3(n+r)-1)a_n + a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$ yineleme bağıntısı elde

edilir.

$r(3r-1)=0 \Rightarrow r=0$, $r=1/3$ dir. Büyük olana r_1 dersek

$r_1 = 1/3$ $r_2 = 0$ ve $r_1 - r_2 = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ olup

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ Frobenius serisi ve

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ kuvvet serisi olarak

bulunur (Ödev)

Örnek: $x(1-x)y'' + (1-x)y' - y = 0$ denkleminin $x_0=0$ noktasında seri çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ düzgün singüler nokta olup $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ şeklinde Frobenius seri çözümü aranır. Türevler alınıp denklemde yerine yazılıp indis eşitliği sağlandıktan sonra

$$r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+r)^2 a_n - \left((n+r-1)^2 + 1 \right) a_{n-1} \right) x^{n+r-1} = 0$$

elde edilir. Buradan

$r^2 a_0 = 0 \Rightarrow a_0 \neq 0$ için $r^2 = 0$ indisel denklem

$(n+r)^2 a_n - \left((n+r-1)^2 + 1 \right) a_{n-1} = 0$ yineleme bağıntısı dır.

$r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$ dur. Not ② ye göre

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0)\, x^n$ şeklinde olacaktır.

$$a_n = \frac{(n+r-1)^2+1}{(n+r)^2} a_{n-1}, \quad n \geq 1 \text{ den}$$

$$a_1 = \frac{r^2+1}{(r+1)^2} a_0, \quad a_2 = \frac{(r+1)^2+1}{(r+2)^2} a_1, \quad a_3 = \frac{(r+2)^2+1}{(r+3)^2} a_2 \cdots, a_n = \frac{(n+r-1)^2+1}{(n+r)^2} a_{n-1}$$

dup taraf tarafa çarparsak

$$a_n(r) = a_n = \frac{(r^2+1)((r+1)^2+1)\cdots((r+(n-1))^2+1)}{(r+1)^2(r+2)^2\cdots(r+n)^2} a_0, \quad n \geq 1 \quad \cdots (*) \text{ olur.}$$

- $r_1 = 0$ için $a_n = \dfrac{1.2.5\cdots((n-1)^2+1)}{1^2.2^2\cdots n^2} a_0 = \dfrac{1.2.5\cdots((n-1)^2+1)}{(n!)^2} a_0$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.5\cdots((n-1)^2+1)}{(n!)^2} x^n \right)$$

$a_0 = 1$ için $y_1(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.5\cdots((n-1)^2+1)}{(n!)^2} x^n$ şeklindedir.

$y_2(x)$ için $a_n'(r)$ yi bulmalıyız. ⊛ ifadesinden türev almak zor olduğu için daha kolay türev alabilmek için her iki tarafın ln i alınırsa ve ln özellikleri kullanılırsa ⊛ ifadesinden

$$\ln a_n(r) = \ln(r^2+1) + \ln((r+1)^2+1) + \dots + \ln((r+n-1)^2+1)$$
$$- 2\left\{\ln(r+1) + \ln(r+2) + \dots + \ln(r+n)\right\} + \ln a_0$$

yazılabilir. Şimdi buradan türev alınırsa

$$\frac{a_n'(r)}{a_n(r)} = \frac{2r}{r^2+1} + \frac{2(r+1)}{(r+1)^2+1} + \dots \frac{2(r+n-1)}{(r+n-1)^2+1} - 2\left\{\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \dots + \frac{1}{r+n}\right\} + 0$$

$a_n'(r)$ çekilip $r_1 = 0$ yazılırsa

$$a_n'(0) = 2\left\{0 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^2+1} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right\} \cdot \overbrace{\frac{1.2.5 \dots ((n-1)^2+1)}{(n!)^2} a_0}^{a_n(0)}$$

dur. Buna bağlı olarak

$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0)x^n$ dan, $a_0 = 1$ için

$$y_2(x) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.5\ldots((n-1)^2+1)}{(n!)^2} x^n\right)\ln x$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{n-1}{(n-1)^2+1} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)\frac{1.2.5\ldots(n-1)^2+1}{(n!)^2} x^n$$

şeklinde bulunur.

Genel çözüm $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ olarak bulunur.